Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2018/2019**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Anneaux quotients - TD 5

1. Soit R un anneau avec $0_R \neq 1_R$. L'anneau R est un corps si et seulement si R a exactement deux idéaux: $\{0_R\}$ et R.

2. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Si R est un corps, alors f est un monomorphisme.

3. Soit R un anneau et $a \in R$. Montrer que l'anneau $R[x]/(x-a)$ est isomorphe à R.

4. Soit R un anneau. Montrer que l'anneau $R[x,y]/(x^2-y)$ est isomorphe à $R[x]$.

5. Soit k un corps, et soient a, b deux éléments distincts de k. Montrer que

$$k[x]/(x-a)(x-b) \cong k[x]/(x-a) \times k[x]/(x-b) \cong k^2.$$

Par récurrence, si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments distincts de k, alors

$$k[x]/(x-a_1)\cdots(x-a_n) \cong k^n.$$

6. Montrer que $\mathbb{Q}[x]/(x-1) \cong \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[x]/(x+1)$.

7. Montrer que $\mathbb{Q}[x]/(x^2-1) \cong \mathbb{Q}^2$.

8. Montrer que $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{Q}[i]$.

9. Montrer que $\mathbb{R}[x]/(x^2-1) \cong \mathbb{R}^2$.

10. Montrer que $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$.

11. Montrer que $\mathbb{C}[x]/(x^2-1) \cong \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}[x]/(x^2+1)$.

12. Montrer que $\mathbb{R}[x]/(x^4-1) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$.

13. Montrer que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]/(x^2-1) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]/(x^2+1)$.

14. Montrer que $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

15. Montrer que $\mathbb{Q}[x]/(x^2+2) \cong \mathbb{Q}[i\sqrt{2}]$.

16. Montrer que $\mathbb{R}[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{R}^2$.

17. Montrer que $\mathbb{R}[x]/(x^2+2) \cong \mathbb{C}$.

18. Montrer que $\mathbb{C}[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}[x]/(x^2+2)$.

19. Soient I, J des idéaux de R tels que $I \subseteq J$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} (R/I)/(J/I) & \to & R/J \\ (r+I)+(J/I) & \mapsto & r+J \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux ($3^{\grave{e}me}$ *Théorème d'isomorphismes d'anneaux*).

20. Soit p un nombre premier. Montrer qu'il n'existe pas d'idéal I de $\mathbb{Z}$ tel que $p\mathbb{Z} \subsetneq I \subsetneq \mathbb{Z}$.